



TITLE:

表面張力を考慮した密度成層のある渦層の非線形発展 (オイラー方程式の数理 : 渦運動150年)

AUTHOR(S):

松岡, 千博

CITATION:

松岡, 千博. 表面張力を考慮した密度成層のある渦層の非線形発展 (オイラー方程式の数理 : 渦運動150年). 数理解析研究所講究録 2009, 1642: 149-163

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140596>

RIGHT:

表面張力を考慮した密度成層のある渦層の非線形発展

松岡千博

愛媛大学大学院理工学研究科

概要

密度成層のある代表的な流体不安定性、Richtmyer-Meshkov (RM) 及び Rayleigh-Taylor (RT) 不安定性において、表面張力項を伴った平面境界の運動が境界積分法を用いて数値的に調べられた。系の Atwood 数が小さいときには、境界はその誘導速度の正則化なしで巻き上がることが示された。液滴の物理において "pinching" として知られている一種の特異性が計算の最終段階で観測され、この現象が境界上に誘導される 1 つの渦対から引き起こされることが示された。我々はまた、表面張力係数が大きいときには、RM 不安定性において安定な振動運動が現れることも示した。重力が考慮される場合には (RT 不安定性)、3 つのパラメーター、Atwood 数、重力、表面張力のある条件下で、線形安定であるが漸近的に不安定な運動が現れることが示された。

1 序論

初期に非一様な渦度が 2 つの異なった密度をもった流体の境界上に分布し、それが衝撃波のような外力によって駆動されると、凹凸のある境界は次第にマッシュルーム状に巻き上がる。この現象は Richtmyer-Meshkov (RM) 不安定性として知られ^{1, 2)}、超新星爆発や³⁾、超音速燃焼、慣性核融合など様々な分野で重要な役割を果たしてきた。系に密度成層が存在することから、RM 不安定性は Rayleigh-Taylor (RT) 不安定性とともに非一様乱流のモデルともなり得る⁴⁾。

境界に表面張力効果が存在すると、RM 及び RT 不安定性は Atwood 数 $A = 1$ (A の定義に関しては Sec. 2 参照) の極限で、それぞれ純粋な毛管波 (capillary wave) 及び毛管重力波 (capillary-gravity wave)^{5, 6)} を記述する。これらの波は、渦運動が存在しない、すなわち剪断速度を伴わない比較的低速な流れを記述する。しかしながら、非粘性 2 流体 ($A \neq 0$) 系中には、液滴の分裂などのように、表面張力を伴った高速運動も存在する⁷⁾。そういった現象の一つに、原始惑星系における隕石の衝突があり⁸⁾、その中では、液体状態の隕石が惑星表面に高速で衝突する。これは表面張力を伴った RM 不安定性の一例である。表面張力効果は、実際の RM 不安定性における実験、例えば、Jacobs 等^{9, 10, 11)} による、2 種の液体で満たされ、瞬間的に加速されるタンクによって不安定となる境界を生成するような実験ではかなり小さい。しかしながら、実験に用いられる液体が表面張力効果が無視できないようなものに置き換わったときには、表面張力項を伴った RM 不安定性を考えることが重要になってくる。Young と Ham は非一様乱流のモデルとして、表面張力を伴った非圧縮な RT 混合流を考え、表面張力は実効混合率を減少させ、RT 混合を一様化させるという結論を得た¹²⁾。この結果は、RT あるいは RM 乱流において表面張力がエネルギースペクトルに影響を与え得ることを示唆している。

よく知られているように、表面張力項は境界の曲率の微分で記述される。従って、この項は支配方程式の中で最高位の空間微分を含み (Sec. 2 参照)、高波数において、慣性項とともに境界の運動を支配し、渦運動を誘起する。また、表面張力項が十分大きいときには、その効果は境界の巻き上がりのような渦運動を抑制し得る^{13, 14)}。Hou 等^{15, 16)} は境界の両側の密度が等しい ($A = 0$) 場合について、表面張力を考慮した渦層の長時間運動を数値的に調べ、液滴の物理において "pinching singularity"⁷⁾ として知られている現象を観測した。

"Pinching" あるいは "pinch-off" は対流非線形性、すなわち渦運動が考慮されているときに、自由境界流れの毛管引力駆動運動において観察される現象である^{7, 17)}。この pinching 現象は 1 個の液滴が複数の液滴に分裂する過程において重要で、"pinching singularity" あるいは "pinch-off" が生じるところでは、境界の曲率と速度が無限大に発散する。この特異性は、表面張力駆動型の運動に特徴的なもので、表面張力がないときの非粘性渦運動に現れる Moore の曲率不安定性¹⁸⁾ とは異なった特異性であると考えられている^{15, 16, 17, 21)}。Hou 等^{15, 16, 21)} はこの pinching singularity を非常に高精度の数値計算スキームを用いて計算し、pinching 領域は自己交差しておらず、狭い隙間が存在するという結論を得た。

この論文で我々は、表面張力が RM 及び RT 不安定性の自由境界運動に与える影響を調べ、その効果がないとき^{13, 14, 19, 20)} や、密度成層が存在しないとき^{15, 16)} には現れない様々な現象を示す。表面張力係数が大きくなるにつれ、境界の巻き上がりは姿を消し、その代わり安定な振動運動が現れる。この振動の振動数は、Atwood 数を固定すると表面張力係数に依存し、またその運動は RT 不安定性に現れる定在波²¹⁾ ほど規則的ではない。重力が考慮される場合、すなわち RT 不安定性の場合には、Atwood 数、重力、表面張力の3つのパラメーターがある条件を満たす場合に、線形安定であるが漸近的に不安定な運動が現れる。これは、その点で系が安定から不安定へと遷移する一種の臨界状態に相当する。このような臨界運動の存在は線形安定性解析からも予測され得るが、具体的にどのような運動であるかが示されたことはない。我々はその臨界運動の最終段階において、pinching に類似した現象が現れることを示す (Sec. 4.3 参照)。Sec. 2 で数値計算に用いられる支配方程式が提示される。Sec. 3 では Hou 等¹⁵⁾ によって開発された数値スキームを用いて、様々な Atwood 数と表面張力係数について、RM 不安定性の境界運動が調べられる。Sec. 4 で RM 不安定性に生じる振動運動と、重力を考慮した場合の運動、すなわち表面張力を考慮した RT 不安定性の運動が議論される。Sec. 5 は結論に充てられている。

2 支配方程式

ここでは2次元系を考える。従って、境界は異なった密度をもった2種の流体の間の1本の曲線とみなせる。支配方程式は境界の位置 (x, y) を記述する方程式と圧力境界条件、すなわち Laplace-Young の条件である。表面張力項によって引き起こされる強い数値不安定性のために、表面張力ゼロの渦層運動のときに用いられる陽的解法^{14)19, 20)} では長時間の計算は不可能である。その代わりにここでは、表面張力項を伴った自由境界の運動を計算するために Hou 等¹⁵⁾ によって開発された数値スキームを採用する。下記にその方法を概説しておく。

2.1 数値計算のための定式化

境界 $\mathbf{X} = (x(\beta, t), y(\beta, t))$ の時間発展は

$$\mathbf{X}_t = U\mathbf{n} + T\mathbf{t}, \quad (1)$$

で記述される。ここで β は境界をパラメトライズするある Lagrangian パラメーターで、 t は時間、 U と T はそれぞれ境界の法線、接線方向の速度である。下付き添え字はその変数についての微分を表す。単位法線ベクトル \mathbf{n} と単位接線ベクトル \mathbf{t} は境界と水平方向とのなす角 θ によって

$$\mathbf{n} = (-\sin\theta, \cos\theta), \quad \mathbf{t} = (\cos\theta, \sin\theta).$$

のように表される。ここで平面曲線の Frenet の公式を用いると

$$\mathbf{t}_s = K\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}_s = -K\mathbf{t},$$

となる。ここで K は境界の曲率で、 s は $s = \int \sqrt{x_\beta^2 + y_\beta^2} d\beta$ で与えられる曲線の長さである。境界上の位置は s_β と θ によって次のように指定される：

$$s_{\beta,t} = T_\beta - \frac{\theta_\beta^2}{s_\beta}, \quad (2a)$$

$$\theta_t = \frac{1}{s_\beta} \left(\frac{\theta_\beta}{s_\beta} \right)_\beta + \frac{T}{s_\beta} \theta_\beta. \quad (2b)$$

今、流れは非粘性非圧縮と仮定しているので、境界において次の圧力境界条件、すなわち Laplace-Young 条件

$$p_1 - p_2 = \sigma K, \quad (3)$$

が成り立ち、これは下記のように書き換えられる：

$$\rho_1 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_1)^2 + g \right] - \rho_2 \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_2)^2 + g \right] = \sigma K. \quad (4)$$

ここで ρ_i は流体 i ($i = 1, 2$) の密度で、 p_i は流体 i における圧力、 g は重力、 σ は表面張力係数、 ϕ_i は流体 i における速度ポテンシャルで各流体の速度 \mathbf{u}_i と $\mathbf{u}_i = \nabla \phi_i$ と関係付けられている。また、非圧縮条件から Laplace 方程式 $\Delta \phi_i = 0$ が各流体領域において成り立っていることに注意していただきたい。

方程式 (4) を β について微分すると、次の Fredholm の第 2 種積分方程式を得る：

$$\gamma_t = \sigma K_\beta + \left(\frac{T^A \gamma}{s_\beta} \right)_\beta + 2A \left[s_\beta \mathbf{W}_t \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma}{s_\beta} \right)_\beta^2 - T^A \mathbf{W}_\beta \cdot \mathbf{t} + g y_\beta \right].$$

ここで γ は渦層の強さを表し、系の循環 $\Gamma \equiv \phi_1 - \phi_2$ と $\gamma = \Gamma_\beta$ で関係付けられる。Atwood 数 A は $A = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_1 + \rho_2)$ で定義されている。ここでは、表面張力係数 $\sigma \rightarrow 2\sigma/(\rho_1 + \rho_2)$ と規格化している。渦誘導速度 $\mathbf{W} = (W_x, W_y)$ は Birkhoff-Rott equation ²²⁾ によって

$$W_x = \text{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\beta', t) d\beta'}{Z(\beta, t) - Z(\beta', t)} \right], \quad W_y = -\text{Im} \left[\frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\beta', t) d\beta'}{Z(\beta, t) - Z(\beta', t)} \right], \quad (5)$$

と与えられる。ここで P.V. は主値を表し、 $Z = x + iy$ である。接線速度 T は

$$T = T^A + \mathbf{W} \cdot \mathbf{t}, \quad (6)$$

と分解される。ここで T^A は接線速度の任意成分で、その選び方は座標系のとり方に依存する。この定式化では、法線速度 U は $U = \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}$ で与えられる。

任意接線速度 T^A は $\sigma = 0$ の場合と $\sigma \neq 0$ の場合で同じにとることはできない。表面張力係数 $\sigma = 0$ の場合には、任意接線速度 T^A は

$$T^A = \frac{\alpha}{2s_\beta} \gamma, \quad (7)$$

ととられる ^{14, 19, 20, 23)}。ここで $\alpha = \alpha(A)$ は $A \neq 0$ において $\alpha \neq 0$ となるような人為的パラメーターである ²³⁾。表面張力 $\sigma \neq 0$ の場合には、任意接線速度 T^A は

$$T^A = \mathbf{W} \cdot \mathbf{t} + \int_0^\beta \left(\theta_\beta U - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta'_\beta U d\beta' \right) d\beta, \quad (8)$$

ととられる。ここで $s_\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s'_\beta d\beta'$ はどこでもその平均値に等しい、すなわち、 s_β は与えられた時刻 t において β に関して定数であるようにとられる ^{15, 16)}。

方程式 (2a)、(2b)、(5) を解いてさらに関係式

$$x = \int_0^\beta s'_\beta \cos \theta(\beta') d\beta' + \beta, \quad y = \int_0^\beta s'_\beta \sin \theta(\beta') d\beta', \quad (9)$$

を用い、 $(s_\beta, \theta, \gamma)$ から (x, y, κ) を復元することができる。ここで $\kappa = \gamma/s_\beta$ は座標系のとり方によらない、“真の”渦層の強さを表している。

2.2 空間離散化と数値計算スキーム

Sec. 1 で述べたように、方程式 (5) 中の K_β は“スティフネス”と呼ばれる強い数値不安定性を引き起こす。この不安定性を避けるため、コーシー積分 (5) を

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\beta', t) d\beta'}{Z(\beta, t) - Z(\beta', t)} = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{Z_\beta(\beta - \beta')} + \left(\frac{1}{Z(\beta, t) - Z(\beta', t)} - \frac{1}{Z_\beta(\beta - \beta')} \right) \right] \gamma(\beta', t) d\beta' \quad (10)$$

のように分解する。このとき法線速度は

$$U(\beta, t) = \frac{1}{2s_\beta} H[\gamma](\beta, t) + E[\gamma](\beta, t), \quad (11)$$

と表される。ここで $H[\gamma]$ は γ のヒルベルト変換で、 $E[\gamma]$ のフーリエ成分は高波数モードにおいて指数関数的に減衰する ²⁴⁾。

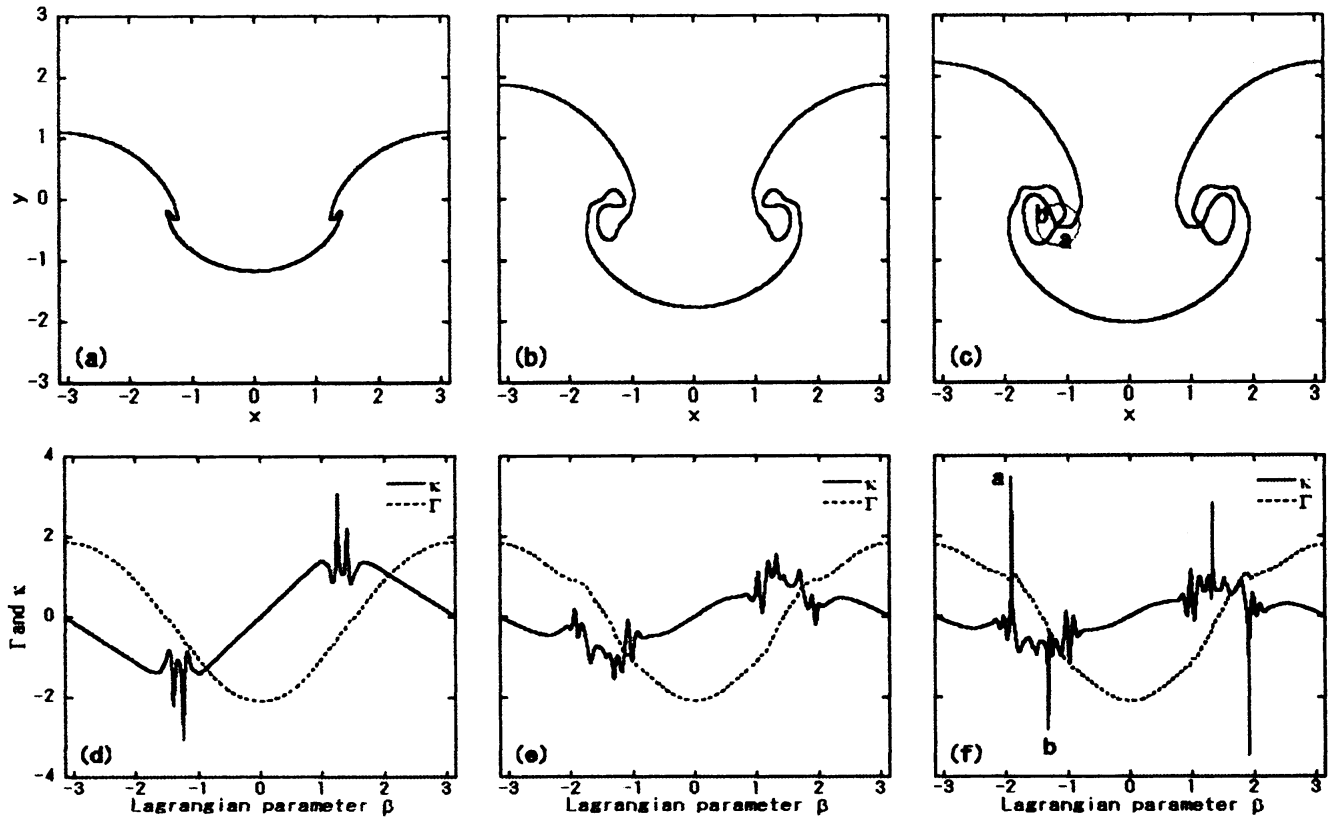


Fig. 1: RM 不安定性における境界の時間発展、渦層の強さ κ 、循環 Γ 。ここでパラメータは $A = 0.2$, $\sigma = 0.05$ ととられている。時刻は (a) と (d) $t = 1.4$, (b) と (e) $t = 3.0$, (c) と (f) $t = 4.14$ である。図 (d)–(f) における実線と点線はそれぞれ渦層の強さ κ と循環 Γ を表している。図 (c) 中の白丸で囲まれた部分は Fig. 2 に拡大されている。

ここで (θ, γ) を

$$\theta = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{\theta}_n e^{in\beta}, \quad \gamma = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{\gamma}_n e^{in\beta},$$

とフーリエモードに展開し、これらを (2b) と (5) に代入すると

$$\hat{\theta}_t = \frac{|n|}{2s_\beta^2} \hat{\gamma}(n) + \hat{P}(n), \quad \hat{\gamma}_t = -\frac{\sigma n^2}{s_\beta} \hat{\theta}(n) + \hat{Q}(n), \quad (12)$$

を得る。ここで N はグリッド数、すなわち点渦の数で、 $\hat{P}(n)$ と $\hat{Q}(n)$ はそれぞれ、もとの方程式 (2b) と (5) において、(12) の右辺第一項を除いた残りの項をフーリエ変換したものである。 s_β に関する発展方程式、すなわち (2a) は、フーリエ変換なしで直接解かれる。

Hou 等¹⁵⁾ に従って、 s_β に関する方程式 (2a) は 2 次のアダムズ・バッシュフォース法で、また、(12) はクランク・ニコルソンスキームで時間発展を計算する。これらの陽的・陰的スキームを同時に用いて、さらに各時間ステップごとに逆フーリエ変換を施すことにより、 s_β 、 θ 、 γ 、従って、 x 、 y 、 κ を復元することができる。空間積分とヒルベルト変換はそれぞれ、Sidi 等によって開発された交互点求積法²⁵⁾ と、DFT を用いて解く。ここではまた、最高次のフーリエモードを減衰させるために 25 次のフーリエフィルター (指数型フィルター)^{24, 26)} を、さらに丸め誤差を避けるためにレベル 10^{-13} の Krasny のフィルター²⁷⁾ を用いている。方程式 (2a)、(2b)、(5)、(9) に現れる β に関するすべての微分 (積分) はスペクトル微分 (積分) で計算される。(12) の中の第 2 種の Fredholm 積分方程式 $\hat{\gamma}_t$ は、レベル 10^{-13} の誤差範囲で、収束するまで反復して解かれる。以上の方法により、支配方程式を指数関数精度 (スペクトル精度) で解くことができる。

安定な陽的スキームで、スペクトル精度をもった別の数値計算法も存在する²⁸⁾ が、この方法では、pinch singularity が現れる前に計算が破綻する。ただし、時間積分の精度はこちらの方が高い (4 次精度)。文献 28) には、計算がた

ちどころに破綻するいくつかの例も含め、表面張力項を伴った渦層運動を計算するための様々な空間積分法が提示されている。

3 Richtmyer-Meshkov 不安定性における Pinching 現象

この節では、表面張力項を伴った RM 不安定性における境界運動のいくつかの数値計算結果を示す。計算にあたっては、 $\beta \rightarrow k\beta$, $x \rightarrow kx$, $y \rightarrow ky$, $t \rightarrow kv_{lin}t$ ^{13, 14)} なる規格化を用いる。ここで、 $v_{lin} = (\rho_1 \delta v_{1x+} - \rho_2 \delta v_{2x+}) / (\rho_1 + \rho_2)$ ^{13, 30)} は漸近的線形成長率で k は系の波数である。また、 δv_{1x+} と δv_{2x+} はそれぞれ、 $t = 0+$ における反射衝撃波と透過衝撃波の後面の接線速度の摂動部分で、これらは初期振幅と入射衝撃波の強度から一意的に定まる¹³⁾。表面張力係数 $\sigma \neq 0$ のときには、時間積分に Sec. 2.2 で述べた陰的・陽的 (クランク・ニコルソンとアダムズ・バッシュフォース) 解法を、 $\sigma = 0$ のときには陽的 (4 次のルンゲ・クッタ) 解法を用いる¹⁴⁾。前者の場合は、任意接線速度 T^A は (8) の形に選ばれ、一方、後者では (7) の形にとられる。この論文を通して、表面張力 $\sigma \neq 0$ のすべての数値計算は、コーシー積分 (5) の正則化²⁹⁾ なしに実行されている。

RM 不安定性に関するすべての計算に関して、 $\sigma = 0$ の場合も $\sigma \neq 0$ の場合も次の初期条件が仮定される：

$$x(\beta, 0) = \beta, \quad y(\beta, 0) = 0, \quad \gamma(\beta, 0) = 2\sin\beta. \quad (13)$$

RM 不安定性の場合は、方程式 (5) 中の重力項 $g = 0$ とおく。非線形領域の結果は、 $\gamma(\beta, 0) \neq 0$ より、初期に凹凸 $y(\beta, 0) = a_0 \cos\beta$ ($|a_0| \ll 1$)^{14, 20)} を入れようと入れまいと変わらないということに触れておく。

計算には周期境界条件が課され、領域 $[-\pi, \pi]$ は基本的にはグリッド数 $N = 1024$ で分割される。Pinching singularity が現れるような領域では、グリッド数 N は $N = 1024$ から $N = 2048$ へと精密化される。RT 不安定性 (Sec. 4 参照) を含むすべての計算で、境界の上側の流体 ($\rho_2, y > 0$) が下側の流体 ($\rho_1, y < 0$) より重いと仮定されている。

3.1 Atwood 数および表面張力係数が小さいときの pinching singularity

Atwood 数 $A = 0.2$ 、表面張力係数 $\sigma = 0.05$ の場合の境界の時間発展が Fig. 1 (a) – (c) に、相当する時刻の循環 $\Gamma = \int \gamma d\beta$ 及び真の渦層強さ $\kappa = \gamma/s_\beta$ が (d) – (f) に示されている。時間積分の時間ステップ Δt は $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ で、グリッド数 N は $N = 1024$ ($0 \leq t \leq 3.0$) から、 $N = 2048$ ($3.0 \leq t \leq 4.1$) へと精密化されている。時刻 $t = 4.1$ から数ステップ後に計算は破綻する。境界は式 (5) 中のコーシー積分の正則化なしで、すなわち、Krasny の正則化パラメーター δ ^{14, 29)} を用いることなく巻き上がるが、その巻き方は同じ Atwood 数で $\sigma = 0$ ¹⁴⁾ の場合に比べるとかなり緩い。時刻 $t = 1.4$ における渦層の最大強さ、すなわち渦核の強さ κ は破綻寸前の時刻 $t = 4.1$ のそれよりも大きい、 $t = 4.1$ の κ にはより多くのフーリエモードが誘起されており、ピーク値の集中も強い。渦層の強さ κ に関するこの傾向は、 $\sigma = 0$ ¹⁴⁾ の場合にも見受けられる。循環 Γ (図中の点線) は、破綻寸前ですら、比較的滑らかさを保っていることがわかる。

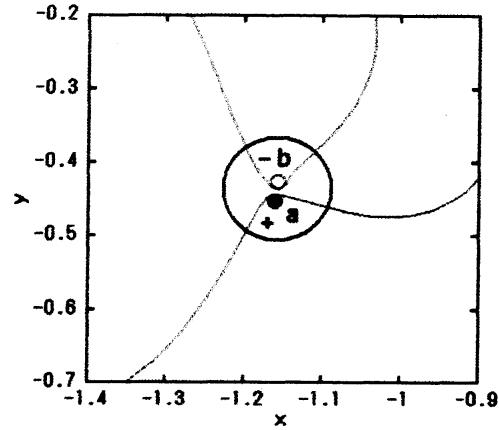


Fig. 2: Fig. 1 (c) の白丸で囲まれた部分の拡大図。

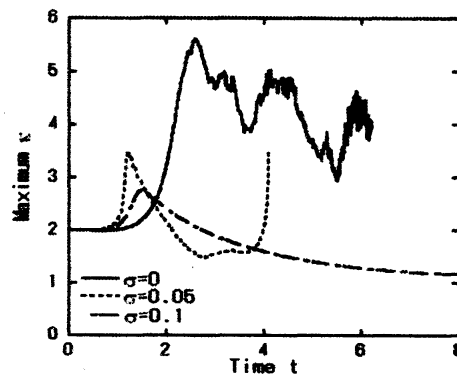


Fig. 3: RM 不安定性における渦層の最大強さ (maximum sheet strength or core strength) κ の絶対値。アトウッド数はすべて $A = 0.2$ で、表面張力係数 $\sigma = 0$ の場合の正則化パラメーター δ は $\delta = 0.1$ ととられている。

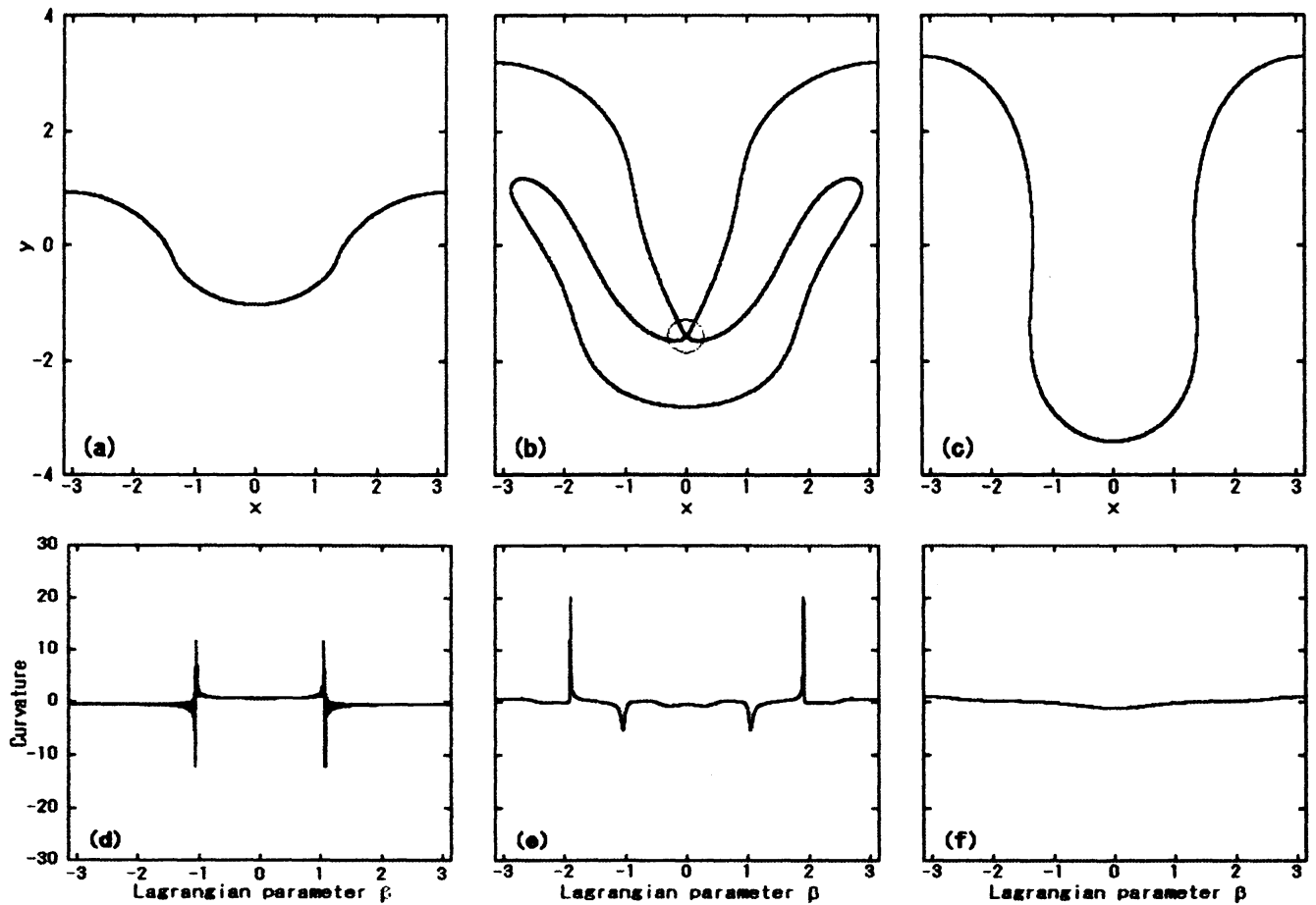


Fig. 4: RM 不安定性における様々な表面張力係数をもった境界の形状とその曲率。ここですべての σ について $A = 0.2$ 。(a) $\sigma = 0, t = 0.93$ (b) $\sigma = 0.1, t = 10.7$ (c) $\sigma = 0.3, t = 12.0$ 。図 (d)–(f) は、それぞれ形状 (a)–(c) に対応する時刻の曲率である。正則化パラメーター δ はすべての計算において $\delta = 0$ ととられている。

Fig. 1 (c) の丸で囲まれた部分の拡大図が Fig. 2 に示されている。この部分（及び y 軸に関して対称な部分）は pinch-off あるいは pinching singularity 領域と呼ばれる^{7, 15, 16, 17}。この図からわかるように、pinching 領域は自己交差しておらず、最近接の2点間には狭い隙間がある。精度が十分に高ければ、これらの2点が自己交差する前に計算が破綻する。一般に、Atwood 数が大きくなるに従って pinching 箇所は減少する (Fig. 5 参照)。Atwood 数 $A = 0$ のときには、pinching singularity は4箇所に見れており、この数はすべての Atwood 数の中で最大である [Fig. 5 (a) 参照]。

Pinching は最近接の2点の先端部分に誘導される1つの渦対によって引き起こされている。Fig. 2 にプラス符号の強い渦度 (a) とマイナス符号の強い渦度 (b) をそれぞれ黒丸、白丸で示した。これらに相当する κ のピーク値が Fig. 1 (f) に示されている。この渦対の総渦度 (net vorticity) は正で、 y 軸に対称に生じるもう一つの渦対の総渦度は負である。Pinching singularity という現象は、移流項から生じる慣性力と表面張力の競合によって引き起こされており、 $\sigma = 0$ の場合の渦層では見られない。このことから、pinching singularity は、よく知られた Moore の曲率不安定性¹⁸⁾ [Fig. 4 (a) and (d) 参照] とは異なった種類の特異性であると思なすことができる。表面張力係数が増加するときには、RM 不安定性における pinching は Atwood 数が十分小さくても現れることはない。

Fig. 3 に、Atwood 数が共通 ($A = 0.2$) で、 $\sigma = 0, \sigma = 0.05, \sigma = 0.1$ の3つの場合の渦層の最大強さ κ の絶対値が示されている。表面張力係数 $\sigma = 0$ の計算は $t = 6.2$ で破綻する。ここで、 $\sigma = 0$ に関しては正則化パラメーター $\delta = 0.1$ ととられている。最大強さ κ は $\sigma = 0$ のときが最も大きく、表面張力係数 σ が増加するに従って減少する。この傾向は他の Atwood 数の場合にも正しい。

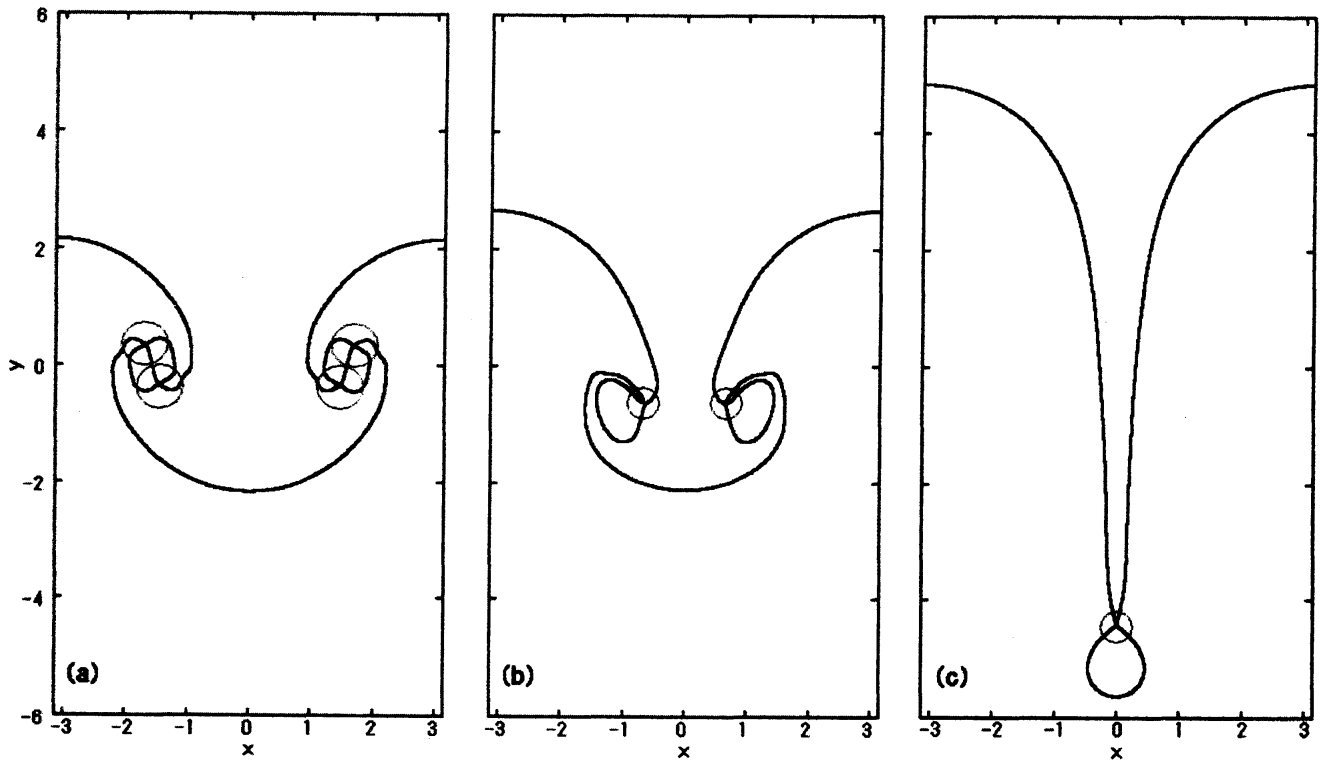


Fig. 5: RM 不安定性における様々な Atwood 数での境界の時間発展。(a) $A = 0$, $t = 4.45$, (b) $A = 0.5$, $t = 4.5$, (c) $A = 1.0$, $t = 7.4$ 。ここですべての計算において表面張力 $\sigma = 0.05$ ととられている。図 (a)–(c) の丸で囲まれた部分はすべて自己交差していない。

3.2 Interfacial profiles for various Atwood numbers and surface tension coefficients

Fig. 4 に固定された Atwood 数 $A = 0.2$ と様々な σ について境界の形状とその曲率を示した。正則化パラメータは $\delta = 0$ である。時間ステップは $\sigma = 0$ の計算に関して $\Delta t = 1.25 \times 10^{-5}$ 、 $\sigma = 0.1$ と 0.3 の計算に関して $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ ととられている。表面張力係数 $\sigma = 0$ と $\sigma = 0.1$ に関する形状はそれらの計算の破綻寸前のものである。ここで、 $\sigma = 0.1$ の場合には、 $N = 1024$ ($0 \leq t \leq 8.0$) から $N = 2048$ ($8.0 \leq t \leq 10.7$) への精密化がなされている。境界の形状 (a) は滑らかでその振幅は小さいが、相当する曲率 (d) は非常に大きいことがわかる。これが $\delta = 0$ かつ $\sigma = 0$ の場合の、よく知られた Moore の曲率不安定性¹⁸⁾ である。表面張力係数 $\sigma = 0$ のときには、有限な δ の場合と違って境界は巻き上がらないことに注意して頂きたい。図 (b) の丸で囲まれた領域は Fig. 2 に見られるのと同様自己交差していない。曲率 (e) の中の鋭いピークがこの領域の最近接の 2 点を表している。表面張力係数 σ が大きい ($\sigma \geq 0.3$) ときには、境界の曲率も渦層の最大強さ κ の値もともに小さく、循環 Γ はその初期形状をほぼ維持していた。また、表面張力 $\sigma \geq 0.3$ の場合には、すべての Atwood 数に関して pinching 現象は観測されなかった。表面張力係数 $\sigma = 0.3$ の計算は安定で、計算は $t = 15$ を超えても破綻しない (Sec. 4.2 参照)。

Fig. 5 は RM 不安定性における固定された $\sigma = 0.05$ での様々な Atwood 数における境界の形状を表している。キャプション中に示されている各図の時刻は、その Atwood 数において計算が破綻する寸前の時刻を示している。ここで時間ステップはすべての計算に関して $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ ととられている。また、すべての計算で $N = 1024$ から $N = 2048$ への精密化がなされている。前者のグリッド数が用いられるのは、 $A = 0$ では $0 \leq t \leq 1.8$ 、 $A = 0.5$ では $0 \leq t \leq 3.0$ 、 $A = 1.0$ では $0 \leq t \leq 1.5$ で、後者のグリッド数が適用されるのは、 $A = 0$ では $1.8 \leq t \leq 4.45$ 、 $A = 0.5$ では $3.0 \leq t \leq 4.5$ 、 $A = 1.0$ では $1.5 \leq t \leq 7.4$ である。図中の丸で囲まれた領域は pinching singularity が起きているところである。Fig. 6 に見られるように、どの pinching 領域でも境界の最近接 2 点間は自己交差していない。Pinching 領域の数は、固定された σ に関し、 $A = 0$ の 4 点から $A = 0.5$ の 2 点、さらに $A = 1.0$ の 1 点へと、Atwood 数が大きくなるに従って減少していく。

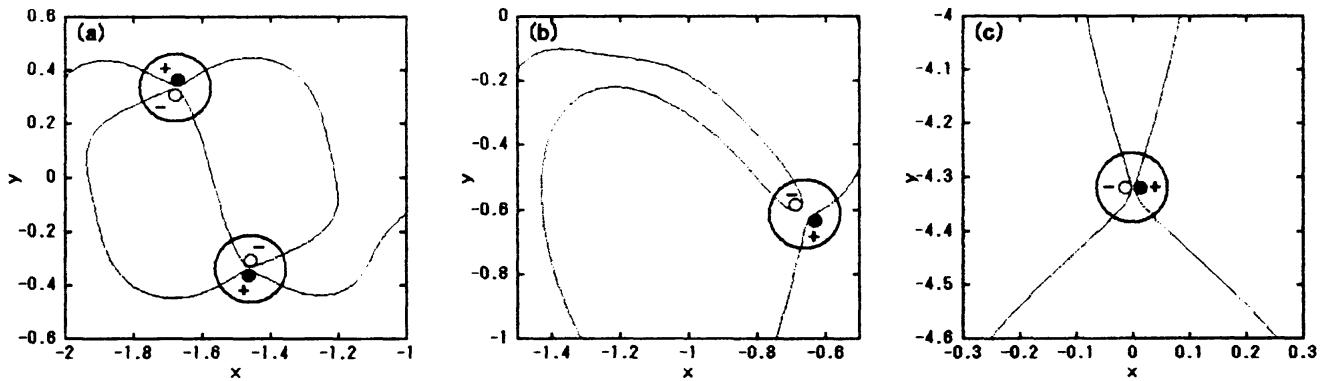


Fig. 6: Fig. 5 の丸で囲まれた部分の拡大図。図 (a) と (b) は $-\pi \leq x \leq 0$ の pinching 部分を拡大している。

4 Richtmyer-Meshkov 不安定性における線形安定性、安定な振動運動と Rayleigh-Taylor 不安定性における不安定運動

4.1 線形安定性解析

表面張力係数が十分大きいと、境界の運動は安定になる。線形安定性解析はこのことを示唆している。系の線形成長率は方程式 (4) と運動学的条件

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

から得られる。ここで $y = \eta(x, t)$ は境界の振幅を現す。我々の規格化では、線形近似の範囲内で振幅 η は

$$\eta \propto e^{i(\omega t - x)} \quad (15)$$

で与えられ、この中で

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{2} - Ag}, \quad (16)$$

である [もし長さを波数 k で規格化しないなら、(15) と (16) はそれぞれ、 $\eta \propto e^{i(\omega t - kx)}$ 及び $\omega = (\sigma k^3/2 - Agk)^{1/2}$ で与えられる]。

式 (15) は、表面張力が存在すると、時間 t に比例するという、よく知られた RM 不安定性 ($g = 0$)^{1, 13, 30} の線形成長率はもはや成り立たず、線形安定性解析の範囲内では運動は安定である、ということを示唆している。有限だが十分小さい表面張力の場合には、渦度を生成し、非線形段階を支配する慣性力がより有効であり、従って線形解 (15) は漸近段階—境界が不安定となり、前節で見たように、巻き上がりや pinching 現象が最終段階に現れる段階—には影響を与えない。一方、大きな表面張力係数の場合には、安定な運動が可能である。この安定運動は Sec. 4.2 で示される。式 (16) からわかるように、系は $g \neq 0$ に関して $Ag > \sigma/2$ で不安定に成り得る (我々の計算では常に $Ag > 0$ と仮定する)。この場合の境界の運動は Sec. 4.3 で与えられる。 $Ag = \sigma/2$ を満たす臨界状態の場合には、長い時間ほぼ静止状態にあり、その後、急に境界が成長して (指数的成長)、最終段階で弱い pinching が現れる奇妙な運動が観測される。RT 不安定性に関するこの臨界運動についても Sec. 4.3 で議論される。

4.2 Richtmyer-Meshkov 不安定性における安定な振動運動

式 (15) から、RM 不安定性 ($g = 0$) における境界は $\sigma \neq 0$ のとき、振動数 $\omega = \sqrt{\sigma/2}$ で振動し得ることがわかる。表面張力係数 σ が小さいときには、慣性力が表面張力効果を凌駕して境界の巻き上がりを引き起こす渦度の集中が生じる。表面張力係数 σ が大きいと、表面張力は系を安定化し、その結果、一種の振動運動が現れる。Fig. 7 (a) と (b) に $A = 0.2$, $\sigma = 2.0$ の場合のこの振動が示されている。スパイク部分 ($x = 0$) は $t = 2.0$ まで下方に成長を続け、こ

ここで反転して次に上方に向かって成長し始める。そして再び $t = 6.0$ 近傍で反転する。この振動はまた、図 (b) におけるバブル ($x = \pm\pi$) とスパイクの運動によっても確かめられる。バブルとスパイクの速度はともに $t = 2.0, 5.8, 9.5$ でゼロになっているが、これらはバブルとスパイクの振幅の絶対値が最大になる時刻に相当し、そこで境界が反転する。この振動の周期は線形安定性解析から導かれる周期 $2\pi/\omega \sim 6.28$ とは一致しない。このことは、振動の周期が波数 k に関してゆっくり変化し、その運動が線形領域にはないことを示唆している。

様々な表面張力係数における渦層の強さ κ の最大値が Fig. 7 (c) に示されている。ここで時間ステップは $\sigma < 1.0$ について $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ 、 $\sigma \geq 1.0$ について $\Delta t = 6.25 \times 10^{-5}$ ととられている。この図からわかるように、振動の周期は小さな表面張力係数の場合により長くなっている。渦層の最大強さ κ は、バブルとスパイクの反転が生じる時刻で最小値をとり、その時間間隔、すなわち最小値が現れる周期は、表面張力係数を固定するとほぼ一定である。

表面張力係数 $\sigma \geq 0.3$ のあらゆる運動は安定で、計算の破綻へと導く、渦層の強さ κ の鋭い集中や境界の振幅のフリーエモードの高波数成分の成長といったものは見られなかった。振動運動における振動数は、Atwood 数の影響をほとんど受けない、すなわち、表面張力係数が十分大きい ($\sigma \geq 0.3$) ときには、固定された σ に対しより大きな Atwood 数でも”同様な”振動数をもった運動が得られるということに触れておく。ここで”同様”というのは、境界の反転が起きる時刻はほぼ同じだが、その形状や渦層の強さ κ は各 Atwood 数について異なっているような場合を指している。RM 不安定性における振動運動は、RT 不安定性に関する定在波 ($Ag < 0$) に見られる振動運動ほど規則的ではなく²¹⁾、振動の振動数は $A = 0$ のときにも定数ではない。また、振動の周期は表面張力係数が大きくなるにつれて短くなる。

4.3 Rayleigh-Taylor 不安定性における不安定運動と臨界運動

この小節では、RM 不安定性との比較のために、RT 不安定性のいくつかの境界の形状とその時間発展の様子を議論する。表面張力 $\sigma = 0$ の場合^{14, 31)} にならって、RT 不安定性の初期条件は様々な重力 $g \neq 0$ の値に関し

$$x(\beta, 0) = \beta, \quad y(\beta, 0) = -0.1 \cos \beta, \quad \gamma(\beta, 0) = 0 \quad (17)$$

とおく。ここで g は $g \rightarrow g/(kv_{lin}^2)$ ¹⁴⁾ のように波数 k と系の線形成長率 v_{lin} で規格化される。

Fig 8 は $A = 0.2$ 、 $g = 10$ 、 $\sigma = 1.0$ の場合の境界の時間発展を示している。ここで、時間ステップは $\Delta t = 6.25 \times 10^{-5}$ ととられ、 $N = 1024$ ($0 \leq t \leq 4.0$) から $N = 2048$ ($4.0 \leq t \leq 5.0$) への精密化がなされている。図からわかるように、十分大きい表面張力係数をもっているにもかかわらず、巻き上がりが観測される。図 (d) の丸で囲まれた領域には pinching 現象が現れているが、やはり自己交差はしていない。RM 不安定性での重力 g を除いた相当するパラメーターにおける運動は Fig. 7

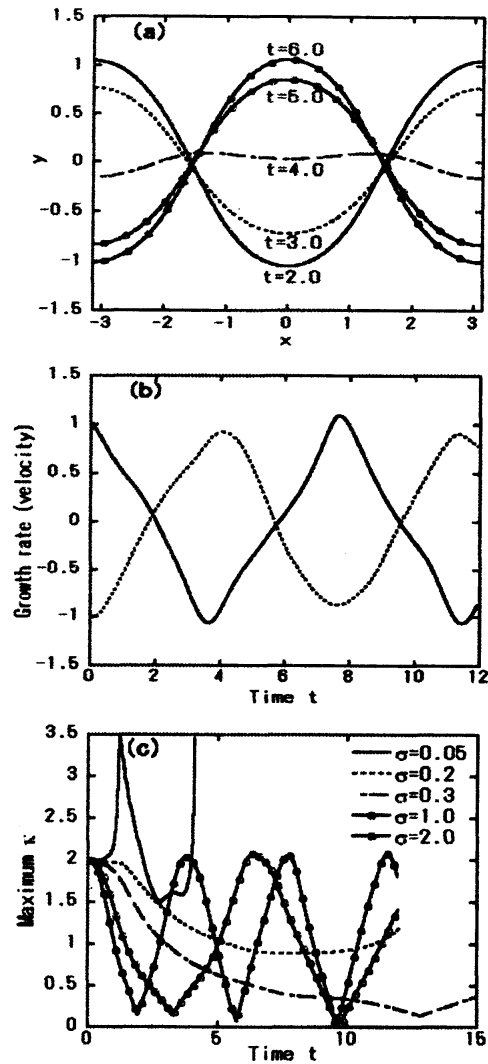


Fig. 7: RM 不安定性における大きな表面張力係数 σ をもった安定な振動運動。(a) 境界の時間変化, (b) バブルとスパイクの成長率 (速度)。ここで、 $\sigma = 2.0$ で、(b) における実線、点線はそれぞれバブル、スパイクを表している。図 (c) は様々な表面張力係数 ($0.05 \leq \sigma \leq 2.0$) における渦層の最大強さ (maximum sheet strength) κ を表す。すべての計算において Atwood 数は $A = 0.2$ としている。

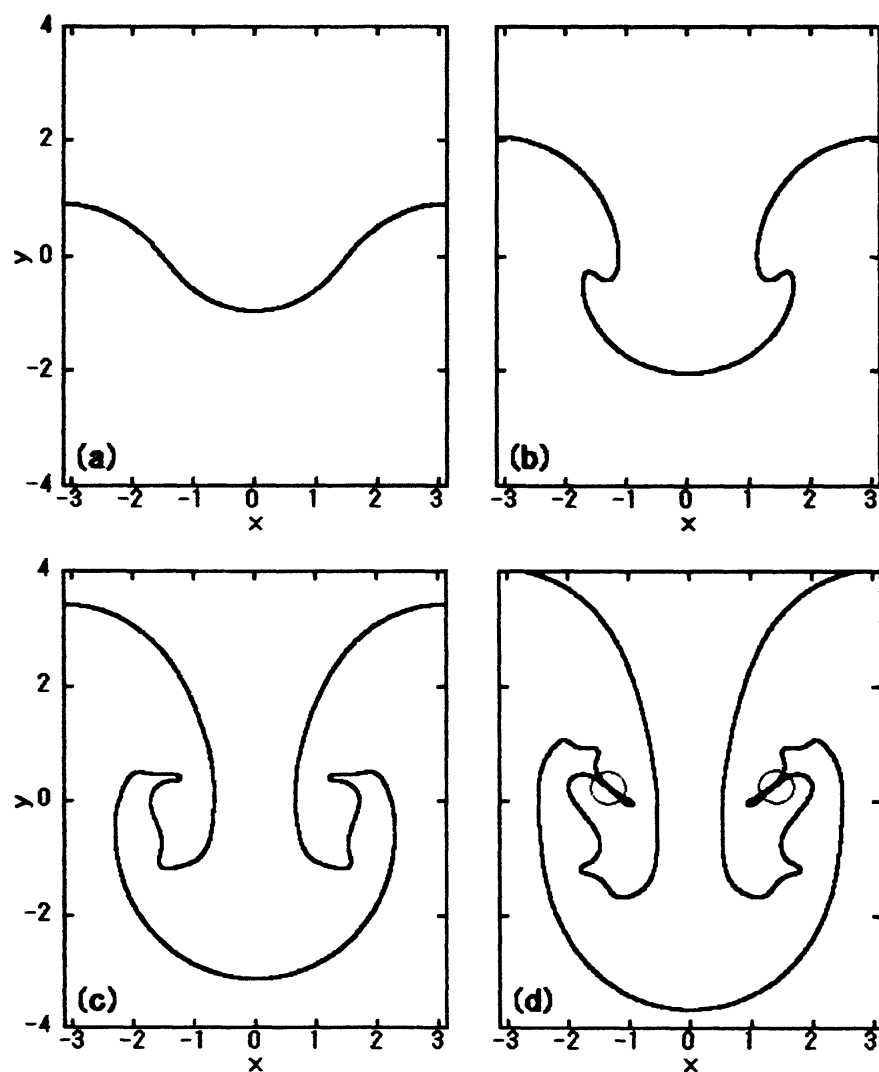


Fig. 8: レーリー・テラー型境界の時間発展。パラメーターの値は $A = 0.2$, $g = 10$, $\sigma = 1.0$ 。ここで (a) $t = 2.5$, (b) $t = 3.5$, (c) $t = 4.5$, (d) $t = 5.0$ である。図 (d) の丸で囲まれた部分は完全には自己交差していない。

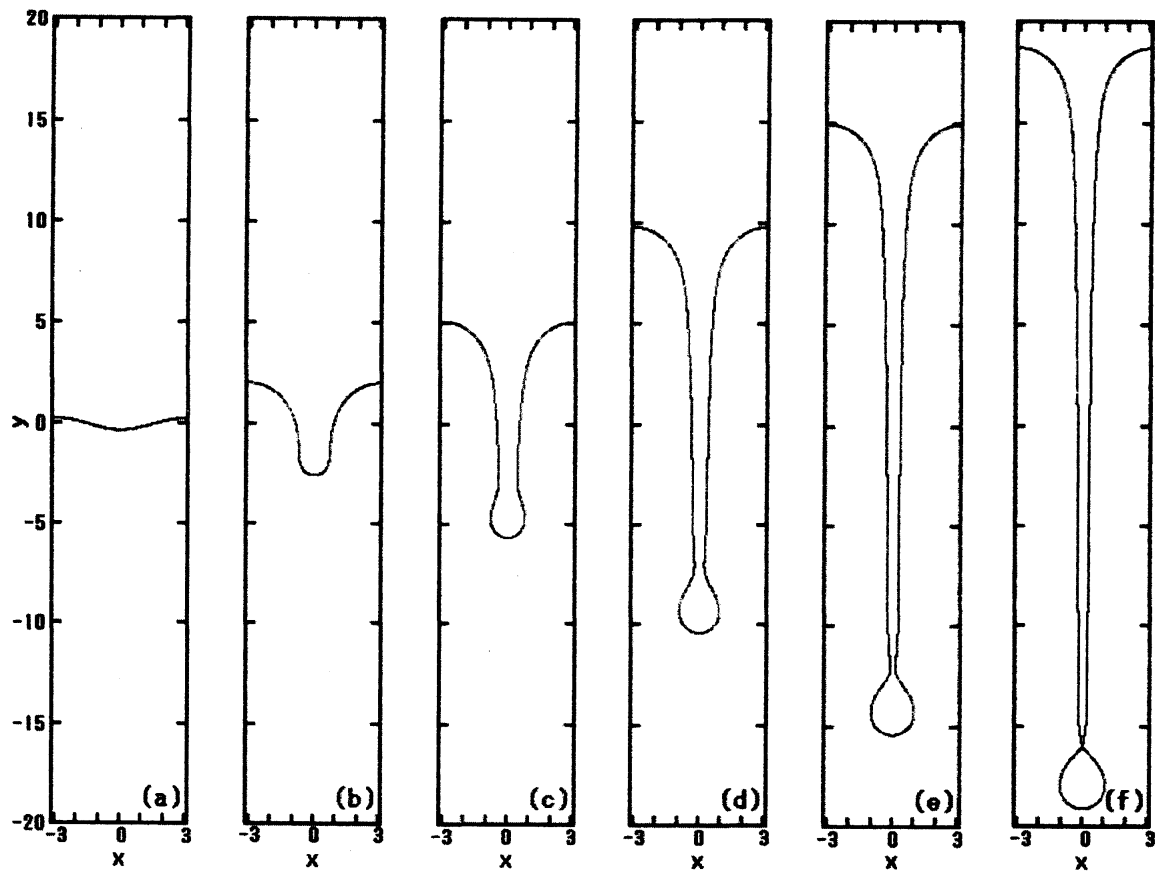


Fig. 9: レーリー・テラー型液滴の時間発展。パラメーターの値は $A = 1.0$, $g = 1.0$, $\sigma = 0.5$ 。ここで (a) $t = 2.0$, (b) $t = 5.0$, (c) $t = 7.0$, (d) $t = 9.0$, (e) $t = 10.6$, (f) $t = 11.6$ 。

(c) に与えられている安定な振動運動であり、巻き上がりや pinching といった現象は現れていない。これは重力が渦度の集中に重要な役割を果たしていることを示唆している。巻き上がりは、Atwood 数と表面張力係数を固定したときには、重力 g が小さくなるにつれて緩くなり、やがて消滅する。

Fig 9 は $A = 1.0$, $g = 1.0$, $\sigma = 0.5$ の場合の境界の時間発展を表している。ここで時間ステップ Δt は $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ ととられ、 $N = 1024$ ($0 \leq t \leq 10.0$) から $N = 2048$ ($10.0 \leq t \leq 11.6$, $t = 11.6$ はここでの破綻時間) への精密化がなされてる。Atwood 数 $A = 1.0$ というのは考えている系が渦層というよりむしろ液滴であるということの意味している [Fig. 5 (c) も参照]。パラメーターと規格化は我々のものとは異なっているが、同様の境界構造が文献 21) でも示されている。一般に巻き上がりは、 g ($g = 0$ を含む) や表面張力の値に関わらず、Atwood 数 $A = 1.0$ では現れない。

Fig. 10 に示されているのは式 (16) において $Ag > \sigma/2$ を満たす境界の一例である。 $Ag < \sigma/2$ のとき、境界の運動は安定な振動で、この振動は $Ag < 0$ で現れる定在波とみなすことができる。 $Ag = \sigma/2$ を満たす臨界状態では、長時間ほぼ安定で、その最終段階において指数的に成長する運動が現れる。この臨界状態の運動を Fig. 10 に示した。ここで時間ステップは $\Delta t = 1.25 \times 10^{-4}$ で、 $N = 512$ ($0 \leq t \leq 28.0$) から $N = 1024$ ($28.0 \leq t \leq 32.0$)、さらに $N = 2048$ ($32.0 \leq t \leq 34.3$) へと精密化がなされている。境界と渦層の強さ κ (従って循環 Γ も) は、 $t = 28.0$ のあたりまで式 (17) で与えられている初期形状から変化せず、この長く穏やかな線形段階の後、境界は Fig. 10 (a)、(b)、(c) に見られるように急激に成長する。Fig. 10 (d) からわかるように、線形段階における渦層の最大強さ κ やバブルとスパイクの速度は、ある種の振動をともなっていてゆっくり増大している。

ここでは $A = 0.2$, $g = 5.0$, $\sigma = 2.0$ なるパラメーターを用いているが、上で述べた運動は $Ag = \sigma/2$ なる関係を満たささえすればいつでも現れる。ただし、線形領域区間の長さは g と σ によって異なる。一般に、この静止区間の間隔は、同じ Atwood 数で比較すると、 g と σ が小さい方が長いという傾向が見られる。一方、表面張力係数 σ が同じ場合には、Atwood 数の大きさにかかわらずある確定した時刻で急激な非線形成長が現れる。固定された σ に関する計算の破綻は、たとえば $A = 1.0$ と $A \neq 1.0$ の場合の非線形段階が同時に始まっていたとしても $A = 1.0$ の場合の方が遅い時刻で生じる。このことは、 $A = 1.0$ の場合には有限な時間で特異点形成が生じることはない³²⁾、という $\sigma = 0$ の場合の理論的予測に関係しているのかもしれない。

5 結論

この論文で我々は、表面張力を考慮した密度成層のある渦層の運動を調べた。ここでなされた計算はスペクトル精度であり、得られた結果は計算機精度の範囲内で Euler 方程式の厳密解とみなすことができる。Atwood 数が小さいときには、RM 不安定性でも RT 不安定性でも正則化パラメーター δ を用いることなく境界の巻き上がりが観測されることが示された。我々はまた、どちらの不安定性においても境界上に誘導される渦対によって、pinching 現象が引き起こされることをみた。この pinching 領域の個数は表面張力係数を固定すると、Atwood 数の増大とともに減少する。

表面張力が大きいときには、RM 不安定性に安定な振動運動が存在することをみた。そのような振動は、Atwood 数 A 、重力 g 、表面張力係数 σ が $Ag < \sigma/2$ を満たしているときには RT 不安定性でも可能であるが、 $Ag < 0$ の場合の定在波に見られるように、その運動は RM 不安定性の振動運動より規則的である。 $Ag = \sigma/2$ の場合には、非線形成長が出現するまでに非常に長い時間を要する臨界運動が見出された。この臨界運動は、条件式を満たす Atwood 数 A 、重力 g 、表面張力係数 σ の任意の値に関して可能であり、その線形段階の長さは Atwood 数 A を固定すると g と σ に依存する。ここで、RM 不安定性における振動運動は線形運動ではなく、系の安定性は表面張力と、その効果が高次項に現れる慣性力との競合によって決定される、ということに触れておく。詳しい非線形解析は別の論文に譲ることとする。

表面張力効果が存在すると、渦層の強さの集中はその効果がゼロの場合に比べて弱い。このことは、Young 等も指摘しているように¹²⁾、表面張力効果が存在すると乱流になりにくい、ということを示唆している。実際の実験や分子動力学 (MD) シミュレーションでは表面張力をコントロールすることは非常に難しく、そのため、表面張力を考慮した (MD シミュレーションを含む) 実験は、RM 不安定性に関するものも RT 不安定性に関するものもほとんど見当たらない。しかしながら、表面張力は気体-液体あるいは液体-液体間の境界には常に存在し、例えば Sec. 1 で述べた液体状態で地表に衝突する隕石の物理などは、表面張力を伴った RM 不安定性の一例であると考えられる。この論文で我々は有限な表面張力係数で起こりうるほぼすべての現象を網羅したつもりである。ここで述べた現象は、表

面張力が慣性力と競合するような実際の系に生じる様々な現象に適用可能である。この分野のさらなる実験的研究が期待される。

謝辞

著者は、西原功修、福本康秀両教授の有益な議論と御指摘に感謝の意を表する。また、Robert Krasny 教授には数値計算に関する様々なアドバイスを頂いた。心より感謝する。

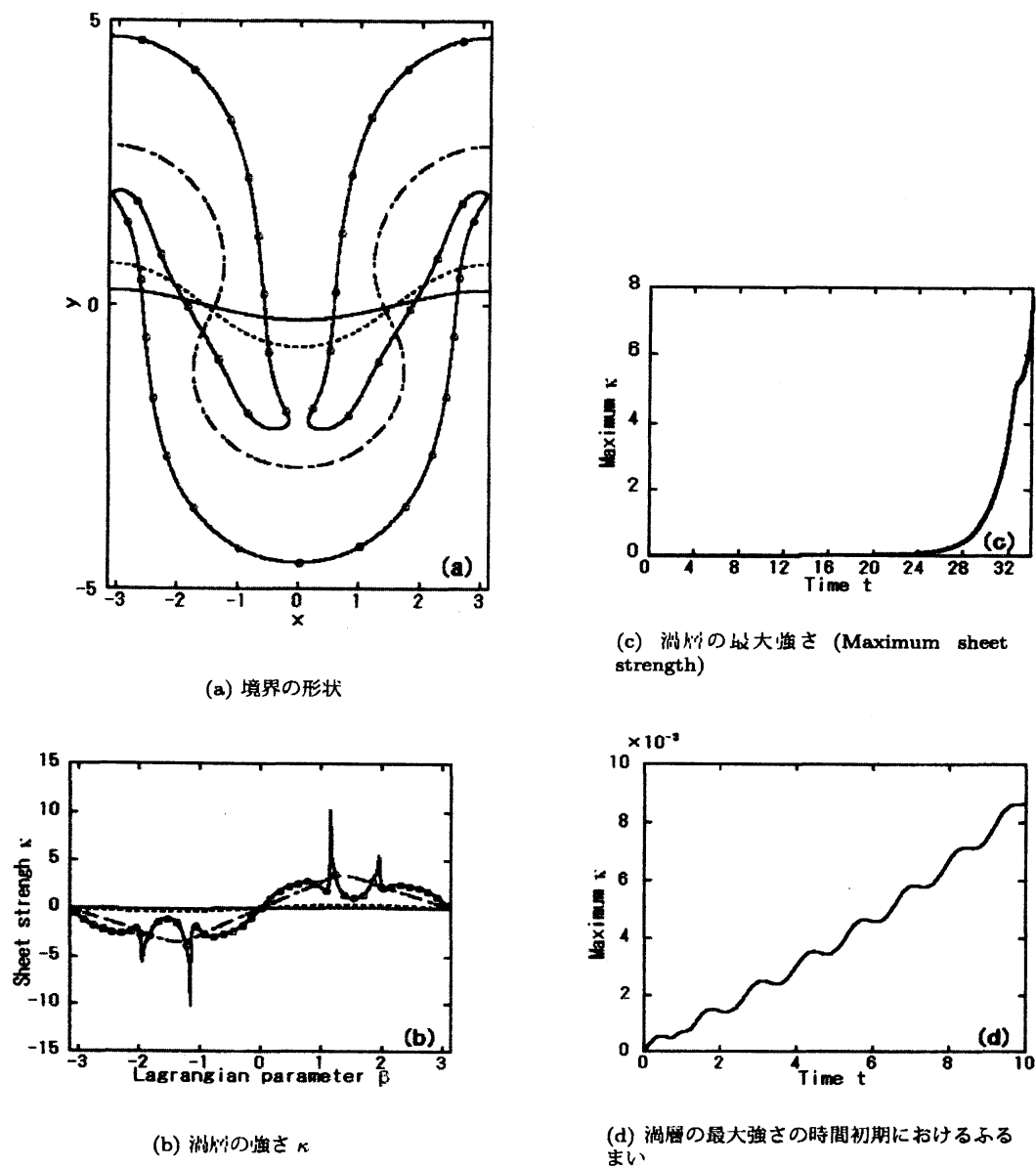


Fig. 10: 臨界状態における境界の時間発展と渦層の強さ。ここでパラメータは $A = 0.2$, $g = 5.0$, $\sigma = 2.0$ である。また、(a), (b) における実線、点線、一点鎖線、白丸付き実線はそれぞれ時刻 $t = 22.0, 28.0, 32.0, 34.3$ に対応している

REFERENCES

- 1) R. D. Richtmyer, "R.D. Richtmyer, Taylor instability in a shock acceleration of compressible fluids," *Comm. Pure. Appl. Math.* **13**, 297 (1960), E. E. Meshkov, "Instability of the interface of two gases accelerated by a shock wave," *Sov. Fluid Dyn.* **4**, 101 (1969).
- 2) A. L. Velikovich, "Analytic theory of Richtmyer-Meshkov instability for the case of reflected rarefaction wave," *Phys. Fluids* **8**, 1666 (1996).
- 3) W. D. Arnett, J. N. Bahcall, R. P. Kirshner and S. E. Woosley, "Supernova 1987A," *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **27**, 629 (1989).
- 4) A. Celani, A. Mazzino and L. Vozella, "Rayleigh-Taylor Turbulence in Two Dimensions," *Phys. Rev. Lett.* **96**, 134504 (2006), W. Cabot and A. W. Cook, "Reynolds number effects on Rayleigh-Taylor instability with possible implications for type Ia supernovae," *Nature Phys.* **2**, 562 (2006), M. Chertkov, "Phenomenology of Rayleigh-Taylor Turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **91**, 115001 (2003).
- 5) G. B. Whitham, in *Linear and Nonlinear Waves*, (John Wiley & Sons, 1999).
- 6) H. Okamoto and M. Shoji, in *The mathematical theory of permanent progressive water-waves*, (World Scientific, 2001).
- 7) J. Eggers, "Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows," *Rev. Mod. Phys.* **69** 865 (1997) [references therein].
- 8) T. Kadono and M. Arakawa, "Breakup of liquids by high velocity flow and size distribution of chondrules," *Icarus* **173** 295 (2005).
- 9) J. W. Jacobs and J. M. Sheeley, "Experimental study of incompressible Richtmyer-Meshkov instability," *Phys. Fluids* **8**, 405 (1996).
- 10) M. A. Jones and J. W. Jacobs, "A membraneless experiment for the study of Richtmyer-Meshkov instability of a shock-accelerated gas interface," *Phys. Fluids* **9**, 3078 (1997).
- 11) P. R. Chapman and J. W. Jacobs, "Experiments on the three-dimensional incompressible Richtmyer-Meshkov instability," *Phys. Fluids* **18**, 074101 (2006).
- 12) Y. N. Young and F. E. Ham, J. "Surface tension in incompressible Rayleigh-Taylor mixing flow," *Turbulence* **7**, DOI: 10.1080/14685240600809979 (2006).
- 13) C. Matsuoka, K. Nishihara and Y. Fukuda, "Nonlinear evolution of an interface in the Richtmyer-Meshkov instability," *Phys. Rev. E* **67**, 036301 (2003), "Erratum: Nonlinear evolution of an interface in the Richtmyer-Meshkov instability," **68**, 029902(E) (2003).
- 14) C. Matsuoka and K. Nishihara, "Vortex core dynamics and singularity formations in incompressible Richtmyer-Meshkov instability," *Phys. Rev. E* **73**, 026304 (2006) [references therein], "Erratum: Vortex core dynamics and singularity formations in incompressible Richtmyer-Meshkov instability," **74**, 049902(E) (2006).
- 15) T. Y. Hou, J. S. Lowengrub and M. J. Shelley, "Removing the stiffness from interfacial flows with surface tension," *J. Comput. Phys.* **114**, 312 (1993).
- 16) T. Y. Hou, J. S. Lowengrub and M. J. Shelley, "The long-time motion of vortex sheets with surface tension," *Phys. Fluids* **9**, 1933 (1997).
- 17) D. Leppinen and J. R. Lister, "Capillary pinch-off in inviscid fluids," *Phys. Fluids* **15**, 568 (2003).

- 18) D. W. Moore, "The Spontaneous Appearance of a Singularity in the Shape of an Evolving Vortex Sheet," *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **365**, 105 (1979).
- 19) C. Matsuoka and K. Nishihara, "Fully nonlinear evolution of a cylindrical vortex sheet in incompressible Richtmyer-Meshkov instability," *Phys. Rev. E* **73**, 055304(R) (2006).
- 20) C. Matsuoka and K. Nishihara, "Analytical and numerical study on a vortex sheet in incompressible Richtmyer-Meshkov instability in cylindrical geometry," *Phys. Rev. E* **74**, 066303 (2006).
- 21) H. D. Cenicerros and T. Y. Hou, "Convergence of a non-stiff boundary integral method for interfacial flows with surface tension," *Math. Comput.* **67**, 137 (1998).
- 22) P. G. Saffman, in *Vortex Dynamics*, (Cambridge, 1992), pp. 141.
- 23) G. R. Baker, D. I. Meiron and S.A. Orszag, "Generalized vortex methods for free-surface flow problems," *J. Fluid Mech.* **123**, 477 (1982).
- 24) J. T. Beale, T. Y. Hou and J. Lowengrub, "Convergence of a Boundary Integral Method for Water Waves," *SIAM J. Numer. Anal.* **33**, 1797 (1996).
- 25) A. Sidi and M. Israeli, "Quadrature methods for periodic singular and weakly singular Fredholm integral equations," *J. Sci. Comput.* **3**, 201 (1988).
- 26) R. Peyret, in *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*, (Springer, 2002).
- 27) R. Krasny, "A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation," *J. Fluid Mech.* **167**, 65 (1986).
- 28) G. Baker and A. Nachbin, "Stable Methods for Vortex Sheet Motion in the Presence of Surface Tension," *SIAM J. Sci. Comput.* **19**, 1737 (1998).
- 29) R. Krasny, "Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane," *J. Fluid Mech.* **184**, 123 (1987).
- 30) J. G. Wouchuk and K. Nishihara, "Linear perturbation growth at a shocked interface," *Phys. Plasmas* **3**, 3761 (1996), "Asymptotic growth in the linear Richtmyer-Meshkov instability," **4**, 1028 (1997).
- 31) S. -I. Sohn, "Vortex model and simulations for Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov instabilities," *Phys. Rev. E* **69**, 036703 (2004).
- 32) G. Baker, R. Caflisch and M. Siegel, "Singularity formation during Rayleigh-Taylor instability," *J. Fluid Mech.* **252**, 51 (1993), S. Tanveer, "Singularities in the Classical Rayleigh-Taylor Flow: Formation and Subsequent Motion," *Proc. R. Soc. Lond. A* **441**, 501 (1993).